CRPE 2025

MATHEMATIQUES

Proposition de corrigé

Sujet groupement 1

ForProf

SUJET 2025 – GROUPEMENT ACADEMIQUE 1

EXERCICE 1

1. Coût total pour 24 élèves avec l'organisme A : $1\ 500€ + 24 \times 100€$ soit un coùt de $3\ 900€$.

   Coût total pour 24 élèves avec l'organisme B : $2\ 000€ + 24 \times 85€$ soit un coùt de $4\ 040€$.

   Puisque 3 900 < 4 040, **le devis de l'organisme A est plus intéressant.**

2. a. Soit x le nombre d'élèves avec x nombre entier compris entre 1 et 110.
   L'expression du coût en fonction du nombre x d'élèves avec l'organisme A est :
   $$f(x) = 1\ 500 + 100 \times x$$
   L'expression du coût en fonction du nombre x d'élèves avec l'organisme B est :
   $$g(x) = 2\ 000 + 85 \times x$$

   b. L'équation $f(x) = 4\ 300$ est équivalente à l'équation
   $$1\ 500 + 100 \times x = 4\ 300$$
   soit
   $$100 \times x = 4\ 300 - 1\ 500$$
   soit encore
   $$100 \times x = 2\ 800$$
   soit
   $$x = 28.$$

   L'équation $f(x) = 4\ 300$ a pour solution le nombre 28.

   Interprétation : pour 28 élèves inscrits au voyage scolaire, le devis de l'organisme A est de 4 300 euros.

   c. Modélisons ce problème à l'aide d'une équation. On doit déterminer le nombre minimal x d'élèves tel que :
   $$g(x) \leq f(x).$$
   Soit :
   $$2\ 000 + 85 \times x \leq 1\ 500 + 100 \times x.$$
   Cette inéquation est équivalente à :
   $$2\ 000 - 1\ 500 \leq 100 \times x - 85 \times x$$

   $$500 \leq 15 \times x$$

   On en déduit que : $\frac{500}{15} \leq x$, soit $x \geq \frac{100}{3}$.

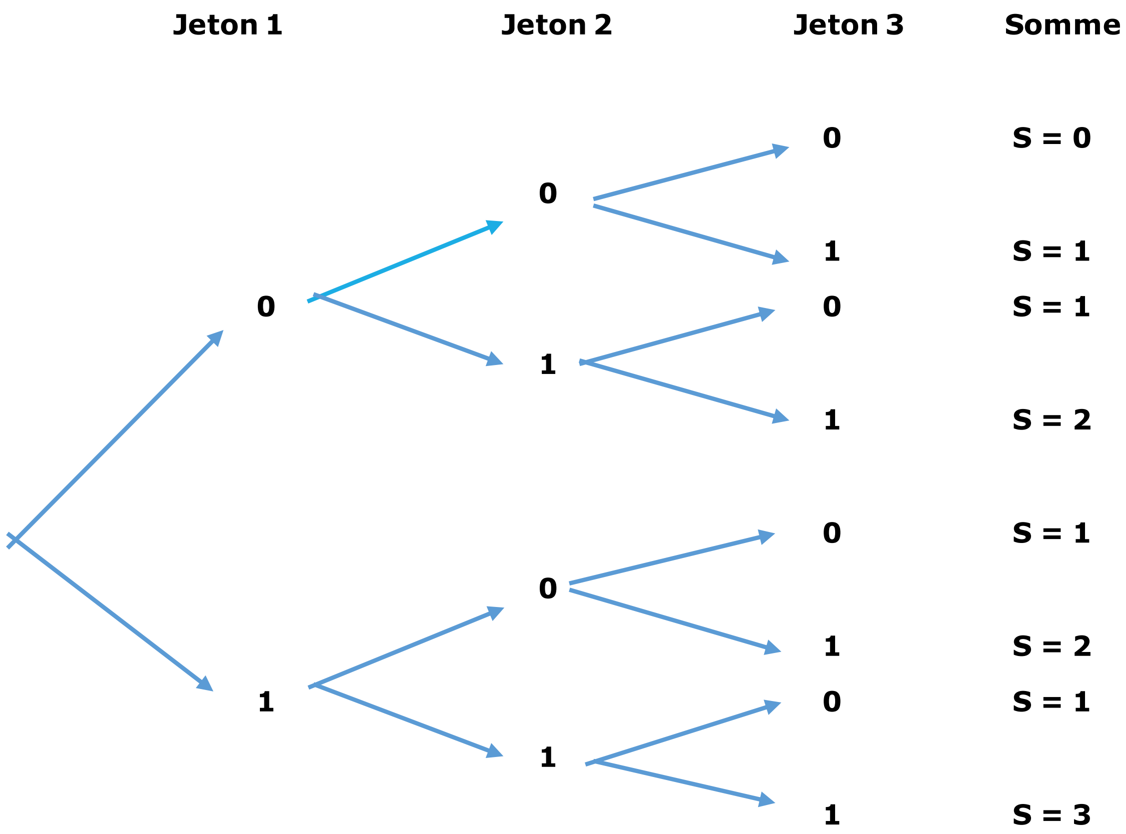
   Puisque $\frac{100}{3} \approx 33{,}33$ et x est un nombre entier, **le nombre minimal d'élèves à partir duquel il est plus avantageux financièrement de choisir l'organisme B est 34.**

3. a. La mairie finance $\frac{2}{5}$ du coût du voyage scolaire, il reste donc à financer $\frac{3}{5}$ de ce coût.
   La moitié de ce reste à charge est financée par la coopérative, soit $\frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$ du coût total.
   L'autre moitié de ce reste à charge sera financée par les familles.
   $1 - \frac{2}{5} - \frac{3}{10} = \frac{10}{10} - \frac{4}{10} - \frac{3}{10} = \mathbf{\frac{3}{10}}$ **du coût total.**

b. Le coût global du voyage scolaire concernant 44 élèves et en choisissant l'organisme B est égal à $g(44)$ euros, soit $2\,000€ + 44 \times 85€ = 5\,740€$.
La coopérative prend en charge $\frac{3}{10}$ du coût total, soit $\frac{3}{10} \times 5\,740€ = 1\,722€$.
La prise en charge par élève (en euro) est égale à $\frac{1\,722}{44}$, soit **39€ en arrondissant à l'euro près.**

EXERCICE 2

1. Modélisons cette expérience aléatoire (jet de 3 jetons numérotés 0 sur une face et 1 sur l'autre face) par un arbre de choix. Notons S la somme des nombres apparaissant sur chaque face en lançant les 3 jetons.



Chaque jeton possède 2 faces, l'univers est donc composé de 8 issues équiprobables :

(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1).

Seule l'issue (1,1,1) permet d'obtenir une somme S égale à 3. **La probabilité d'obtenir une somme égale à 3 est $\frac{1}{8}$.**

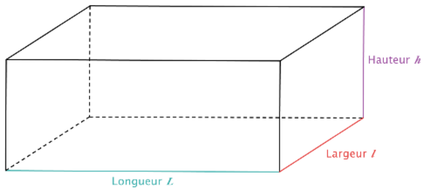
2. On constate que, parmi les 8 issues possibles : (0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1), il y a 2 ou 3 faces identiques. Il est donc impossible que les 3 jetons donnent des résultats tous différents. **Jeanne a donc raison**.

3. D'après l'arbre de choix précédent, seules deux issues (0,0,0) et (1,1,1) sur les 8 possibles permettent d'avoir 3 faces identiques. Les 8 événements élémentaires étant équiprobables, la probabilité d'obtenir 3 faces identiques est égale à $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

   Olivier n'a pas raison.

EXERCICE 3

Partie A



1. Le volume V d'un parallélépipède rectangle (image ci-contre) est donné par la formule : $V = L \times l \times h$
   La forme de la fosse est un parallélépipède rectangle tel que : $L = 30m$, $l = 15m$ *et* $h = 3m$.
   On en déduit que : $V = 30m \times 15m \times 3m = 1\ 350\ m^3$.
   Le volume de la fosse est égal à *1 350 m³*.

2. Le volume de la terre retirée augmente de 25%, le volume est donc multiplié par 1,25.
   $$1\ 350 \times 1{,}25 = 1\ 687{,}5.$$
   Après foisonnement, **le volume de terre à retirer est égal à 1 687,5 m^3.**

3. Il suffit de diviser ce volume de terre à retirer par le volume que peut évacuer une benne, soit 30 m^3.
   $$\frac{1\ 687{,}5}{30} = 56{,}25$$
   Il faut donc au minimum 57 bennes pour évacuer cette terre (56 bennes pleines et une benne supplémentaire pour le reste de la terre).

Partie B

1. **Le pourcentage d'augmentation du volume d'eau, arrondi au centième de pourcent, est égal à 0,34.** En effet : $\frac{564\ 000 - 562\ 100}{562\ 100} = \frac{1900}{562\ 100} \approx 0{,}00338$ soit 0,34% valeur arrondie au centième de %.
2. On convertit : 564 000 L = 564 m^3 car 1 000 L = 1 m^3.

   Le volume de la quantité d'eau est donné par la formule :

   $V_{eau} = L \times l \times h$ avec $L = 25m$, $l = 12{,}5m$, h m.

   Puisque que l'on sait que $V_{eau} = 564\ m^3$, on a : $h = \frac{564m3}{25m \times 12{,}5m} = 1{,}8048m$.

   La hauteur de l'eau de la piscine, chauffée à 25° C, est égale à 1,80 mètre (valeur arrondie au cm près).

Partie C

1. Distance totale parcourue par l'élève : $16 \times 25m = 400m$.
   Durée des 16 longueurs : 10 min.
   La vitesse moyenne $V_{m/min}$ en mètre par minute est donnée par la formule
   $V_{m/min} = \frac{distance\ totale\ parcourue\ en\ mètres}{durée\ des\ 16\ longueurs\ en\ minutes}$
   $V_{m/min} = \frac{400m}{10min} = 40m/min$

La vitesse moyenne de l'élève est égale à 40 mètres par minute.
Comme $1\,\text{min} = \frac{1}{60}h$ et que 400m=0,4km, la vitesse de cette élève en kilomètre par heure est égale : $V_{\text{km/h}} = \frac{0{,}4km}{\frac{1}{60}h} = 2{,}4km/h.$
La vitesse moyenne de l'élève est égale à 2,4 kilomètres par heure.

2. Notons D la distance parcourue en mètres par cet autre élève. On a : $D = V \times t$ où V est la vitesse moyenne de cet élève en m/s et t le temps de parcours en secondes.
   On a : $t = 10min = 600s$ et $V = 0{,}6\ m/s$.
   D'où : $D = 0{,}6\ m/s \times 600s = 360m$.
   La distance totale parcourue par cette élève est de 360 mètres.
   Le nombre de longueurs effectuées est : $\frac{360}{25} = 14{,}4$.
   L'élève a effectué 14 longueurs complètes.

3. a. La formule à saisir dans la cellule B3 est : = *B2**25
   Cette formule peut être recopiée vers la droite pour calculer la distance parcourue par tous les élèves.

   b. Sur les 9 élèves, 6 élèves ont parcouru 12 longueurs ou plus de 12 longueurs, soit une proportion de $\frac{2}{3}$. (en effet : $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$).

   c. Classons les 9 valeurs par ordre croissant : 10 - 11 - 11 - 12 – **13** – 14 – 14 - 15 – 16. La médiane est la valeur située au centre de cette série statistique, soit 13.
   La médiane est donc 13.
   <u>Interprétation</u> : au moins 50% des élèves ont effectué moins de 13 longueurs ou 13 longueurs, au moins 50% des élèves ont effectué plus de 13 longueurs ou 13 longueurs.

   d. Le nombre moyen de longueurs effectuées par ce groupe d'élèves est égal au quotient de la somme des longueurs effectuées et du nombre d'élèves de ce groupe.
   On a : $\frac{15+14+10+11+12+14+11+13+16}{9} = \frac{116}{9} \approx 12{,}89$
   Le nombre moyen de longueurs effectuées par ce groupe d'élèves est 12,9 valeur arrondie au dixième.

   e. Le nombre total de longueurs effectuées par les 9 élèves présents est égal à 116.
   Pour obtenir une moyenne de 13 longueurs effectuées par 10 élèves, il faut que le nombre total de longueurs effectuées par le groupe des 10 élèves soit de 130.
   L'élève absent devra donc parcourir 14 longueurs (130 – 116) pour que le nombre moyen soit de 13 longueurs.

EXERCICE 4

Les nombres *a, b, c, d* et *e* sont des entiers naturels non nuls.

1. Pour que le nombre $\frac{a}{45}$ soit un entier naturel, il faut que le nombre a soit un multiple positif de 45. Puisque a est non nul, ce multiple doit aussi être non nul.
   On peut choisir $a = 45$. En effet : $\frac{a}{45} = \frac{45}{45} = 1$ et le nombre 1 est bien un entier naturel.

2. $\frac{45}{b}$ est un entier naturel si le nombre b est un diviseur de 45.
La décomposition de 45 en produit de facteurs premiers est $3^2 \times 5$.
Les diviseurs de 45 sont : 1, 3, 5, 9, 15 et 45.
Les valeurs de b pour lesquelles $\frac{45}{b}$ soit un nombre entier naturel sont 1, 3, 5, 9, 15, 45.

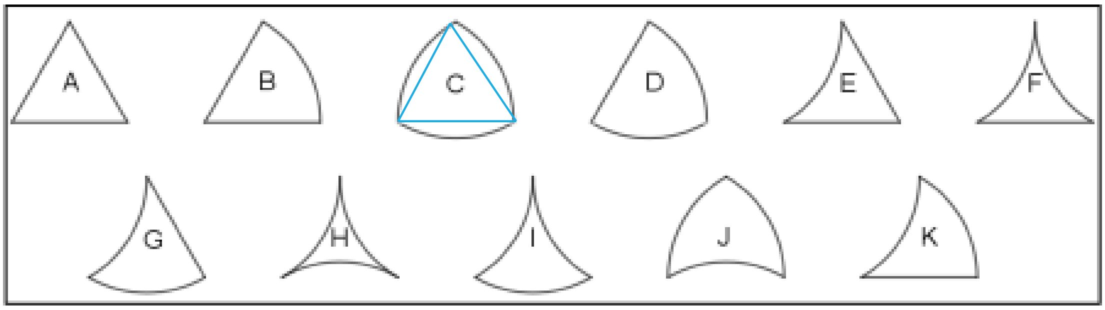
3. $\frac{c}{45} = \frac{c}{5\times3^2}$ Pour que $\frac{c}{45}$ soit un nombre décimal non entier naturel, il faut que c soit un multiple de 9 et ne soit pas aussi multiple de 5. On peut choisir $c = 9$.
$$\frac{c}{45} = \frac{9}{45} = \frac{1}{5} = 0{,}2$$
0,2 est un nombre décimal non entier naturel.

4. $\frac{45}{d} = \frac{5\times3^2}{d}$
Pour que $\frac{45}{d}$ soit un nombre décimal non entier naturel, il faut que d ne soit pas un des 6 diviseurs de 45. On peut choisir $d = 2$.
$\frac{45}{2} = 22{,}5$ et 22,5 est bien un nombre décimal non entier naturel.

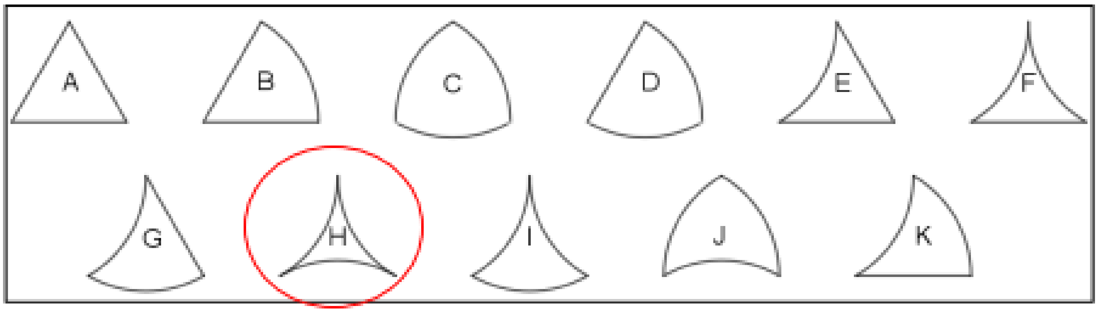
5. $\frac{e}{45} = \frac{e}{5\times3^2}$ Il suffit de choisir comme valeur de *e* n'importe quel nombre entier naturel non multiple de 9, par exemple e=5. Dans ce cas : $\frac{5}{45} = \frac{1}{9}$ qui est un rationnel non décimal.

EXERCICE 5

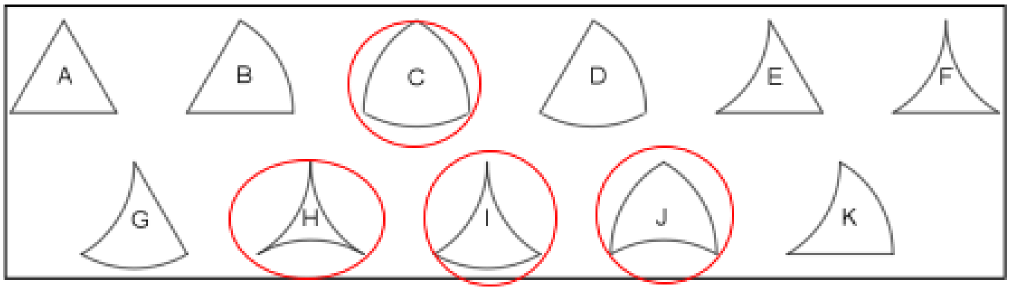
1. La figure ayant la plus grande aire est la figure bombée des 3 côtés (les 3 lunules créées par les arcs de cercle augmentent l'aire du triangle équilatéral A), soit la **figure C.**



2. La figure ayant la plus petite aire est la figure la plus creusée à partir des 3 côtés, soit la **figure H.**



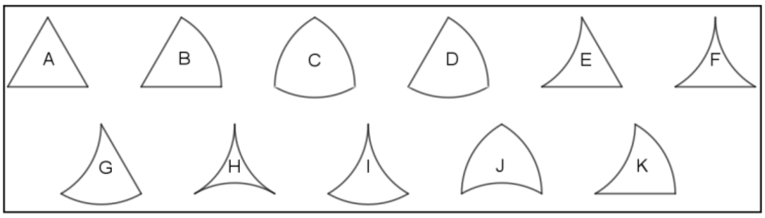
3. Les quatre figures qui ont le même périmètre et des aires différentes sont : **C, H, I et J**.



Les 4 figures entourées sont composées de 3 arcs de cercle de même longueur, donc ces figures ont le même périmètre.

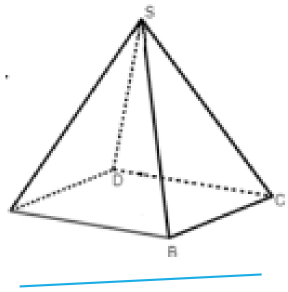
4. Les trois paires de figures qui ont la même aire mais des périmètres différents sont :

   - **Paire A - G**
   - **Paire B - J**
   - **Paire E – I**



EXERCICE 6

1. Les triangles SAB et SBC sont équilatéraux donc SA = SB = AB et SB = SC = BC.
   On en déduit que SA = SC. **Le triangle SAC est donc isocèle en C.**
   ABCD est un carré de côté 4 cm, la diagonale [AC] mesure donc $4\sqrt{2}\ cm$.
   Puisque les triangles SAB et SBC sont isométriques et équilatéraux, SA = SC = 4 cm.
   On a : $SA^2 + SC^2 = 4^2 + 4^2 = 16 + 16 = 32$ et $AC^2 = (4\sqrt{2})^2 = 32$.
   On en déduit que $SA^2 + SC^2 = AC^2$.
   La **réciproque du théorème de Pythagore** permet d'affirmer que le triangle SAC est rectangle en S.



   Conclusion : le triangle SAC est rectangle et isocèle en S.

2. La figure 1 est bien un patron de la pyramide. Elle est composée de 5 faces qui ne vont pas se superposer : 4 triangles équilatéraux et un carré.
   La figure 2 n'est pas un patron de la pyramide car, en reconstituant la pyramide, les faces T_3 et T_4 vont se superposer.
   La figure 3 n'est pas un patron de la pyramide car les faces T_1 et T_4 ne sont pas des triangles équilatéraux.

Figure 1

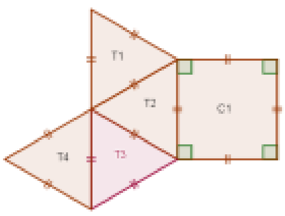


Figure 2

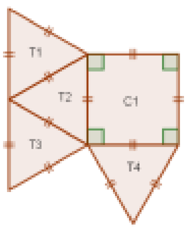
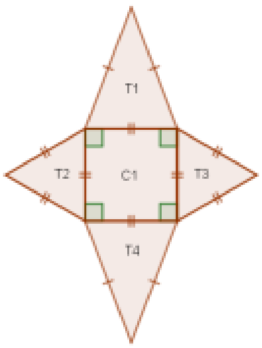


Figure 3



3. On a 1 cm = 20 pas. On en déduit que 4 cm = 80 pas.

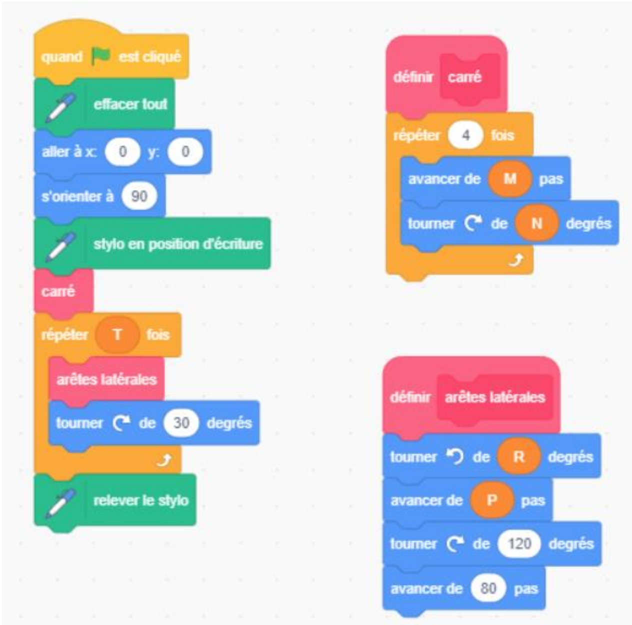
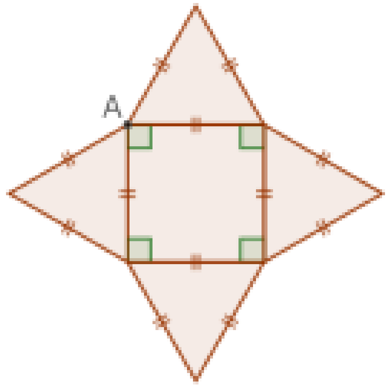


Figure 4



M est égal au nombre de pas correspondant à la longueur d'un côté du carré, soit **M=80.**
N est égal à la mesure en degré de l'angle au sommet d'un carré, soit N=90.
P est égal au nombre de pas correspondant à la longueur d'un côté des triangles équilatéraux, soit **P=80**.
R est égal à la mesure en degrés des angles internes d'un triangle équilatéral, soit **R=60**.
T est égal au nombre de triangles équilatéraux du patron de la pyramide soit **T=4**.