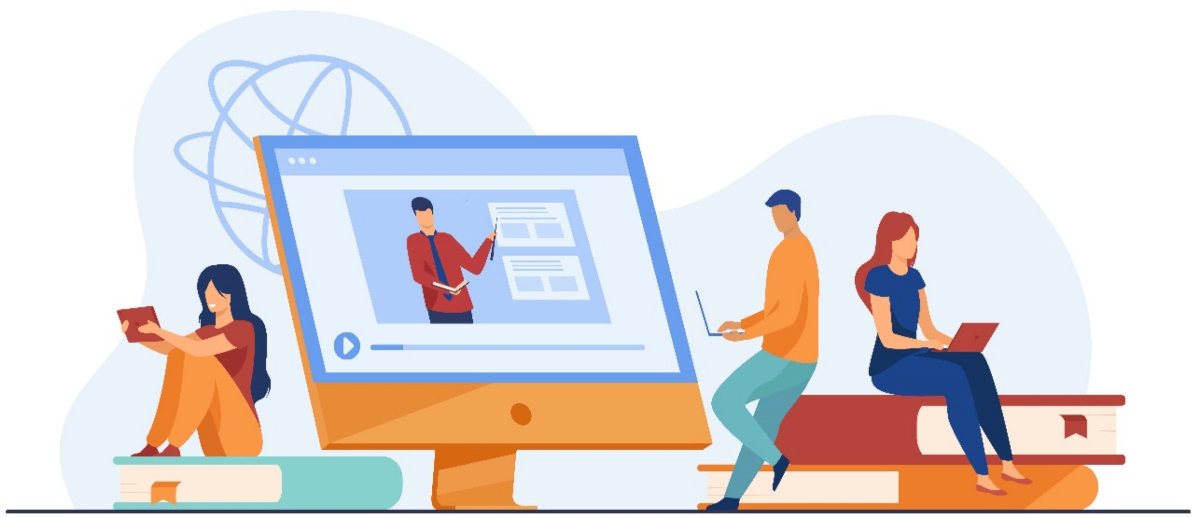
CORRIGÉ

Épreuve de Mathématiques

CRPE 2024 – groupement 1



ForProf

Exercice 1

Partie A

1. La longueur minimale de l'étiquette est égale au périmètre du cercle de base du cylindre.

Ce périmètre est égal en centimètres à $\pi \times d = 8{,}4 \times \pi$
$(d\ \textit{étant le diamètre de la base du cylindre})$.

La valeur approchée par excès au mm près est égale à 26,4 cm.

2. Soit V le volume du cylindre. On a V= $\pi \times (\frac{d}{2})^2 \times h$ avec $d = 8{,}4\ cm$ et $h = 15\ cm$.
   La valeur exacte de V en cm³ est V = $264{,}6 \times \pi$.
   Or 1 dm³ = 1000 cm³ = 1 L.
   V = $0{,}2646 \times \pi$ L soit **une valeur arrondie de V au cL près : 0,83 L.**

3. Le courbe n°3 correspond au pluviomètre de Jules. En effet, le volume est proportionnel à la hauteur d'eau. De plus, lorsque la hauteur est égale à 15 cm, c'est la seule courbe qui donne un volume approximatif de 830 cm³ (0,83 L).
   La courbe n°1 correspond au pluviomètre d'Inès. La partie haute de la bouteille a une forme différente du cylindre : en retournant la bouteille, l'eau montera plus vite que pour la partie basse à volume équivalent, et la hauteur d'eau va donc évoluer plus rapidement au départ.

Partie B

1. On calcule la moyenne des précipitations des 10 mois pour la ville de Rennes. Cette moyenne, en mm, est égale à $\frac{65+103+\cdots+134}{10} = \frac{648}{10} = 64{,}8$.
   En moyenne, c'est la ville de Lyon qui a subi le plus de précipitations au cours des 10 mois (70,6 mm > 64,8 mm).

2. Pour la ville de Rennes, l'étendue est égale à 134 mm – 19 mm = 115 mm.
   Pour la ville de Lyon, l'étendue est égale à 179 mm – 18 mm = 161 mm.
   L'étendue est plus importante dans la ville de Lyon.

3. On sait que la médiane est égale à 58 mm. On en déduit que pendant 5 mois, les précipitations mensuelles étaient supérieures ou égales à 58 mm. On ne peut pas affirmer qu'au cours de 5 mois les précipitations étaient supérieures à 70,6 mm. L'affirmation est fausse.

Exercice 2

1. 0,28 est un nombre décimal. Tout nombre décimal est un nombre rationnel donc 0,28 est un nombre rationnel.
   L'affirmation est vraie.

2. Choisissons a = 2 et b = 1 deux nombres strictement positifs. Le quotient de a par b est égal à 2. Le nombre 2 n'est pas strictement inférieur à a.
   L'affirmation est fausse.

3. Tout entier naturel impair est de la forme 2k+1 où k est un entier naturel.
Posons $N = 2 \times k + 1$ et $N' = 2 \times k' + 1$ deux nombres naturels impairs avec k et k' des entiers naturels. Le produit de ces deux nombres naturels impairs est $N \times N'$.

On a : $N \times N' = (2 \times k + 1) \times (2 \times k' + 1)$.

Développons :
$$N \times N' = 4 \times k \times k' + 2 \times k \times 1 + 1 \times 2 \times k' + 1 \times 1$$

soit encore
$$N \times N' = 2(2 \times k \times k' + k + k') + 1$$

Le nombre $2(2 \times k \times k' + k + k')$ est pair, le nombre $2(2 \times k \times k' + k + k') + 1$ est donc impair.
L'affirmation est vraie.

4. On a $f(x) = 2x - 1{,}5$, on en déduit que $f(0) = 2 \times 0 - 1{,}5 = -1{,}5$ donc $f(0) \neq 2$.
L'affirmation est fausse.

5. Dans le triangle ABC, on a :
6.

- les points A, D, B et A, E, C sont alignés dans le même ordre.

- On a : $\frac{AD}{AB} = \frac{2{,}4}{7{,}8}$ et $\frac{AE}{AC} = \frac{2{,}4}{7{,}8}$.

  On en déduit que $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$.

D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (ED) et (BC) sont parallèles.

On peut donc écrire : $\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB}$

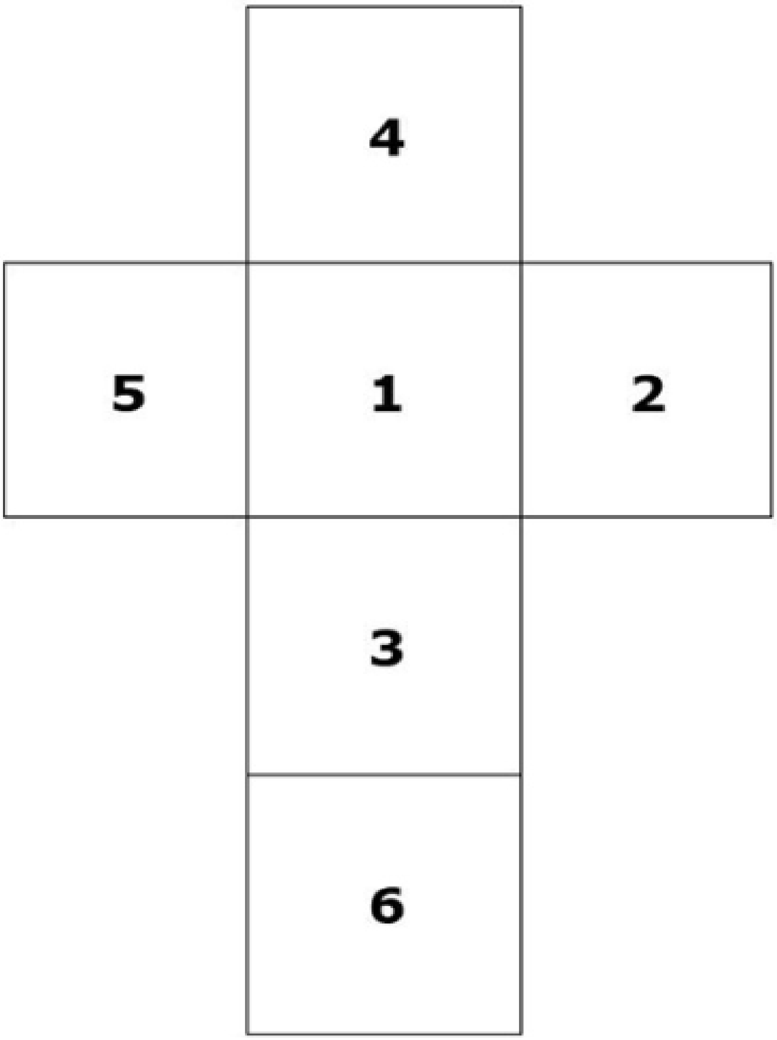
Soit en remplaçant DE, AD et AB par les données de l'énoncé,
$$\frac{2{,}9}{BC} = \frac{2{,}4}{7{,}8}$$

D'où
$$BC = \frac{2{,}9 \times 7{,}8}{2{,}4} = 9{,}425$$

La longueur BC arrondie au mm près est égal à 9,4 cm.
L'affirmation est vraie.

Exercice 3
Partie A

Le patron d'un dé cubique est composé de 6 carrés isométriques. Chaque longueur de côté mesure 3,8 cm.



NB : nous ne présentons ici qu'un patron parmi plusieurs possibles : d'autres patrons du cube sont réalisables, ainsi que d'autres agencements de la numérotation des faces.

Partie B

1. Lorsqu'on somme deux nombres entiers compris entre 1 et 6, la somme est comprise entre 2 et 12.
   Les résultats possibles sont : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 et 12.

2. En lançant deux dés, il y a 36 issues possibles. Le dé étant équilibré, on est dans une situation d'équiprobabilité.

Pour obtenir une somme égale à 4, il y a trois issues favorables : « obtenir 1 sur le premier dé et obtenir 3 sur le second », « obtenir 3 sur le premier dé et obtenir 1 sur le second » et « obtenir le numéro 2 sur les deux dés » (cf. tableau ci-dessous).

La probabilité d'obtenir une somme égale à 4 sur les deux dés est donc égale à $\frac{3}{36}$, soit $\frac{1}{12}$.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)	(1;5)	(1;6)
2	(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2;4)	(2;5)	(2;6)
3	(3;1)	(3;2)	(3;3)	(3;4)	(3;5)	(3;6)
4	(4;1)	(4;2)	(4;3)	(4;4)	(4;5)	(4;6)
5	(5;1)	(5;2)	(5;3)	(5;4)	(5;5)	(5;6)
6	(6;1)	(6;2)	(6;3)	(6;4)	(6;5)	(6;6)

3. a. Remplissons un tableau à double entrée en faisant apparaître les différentes sommes.

2^{e} dé / 1er dé	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11

6	7	8	9	10	11	12

On constate que la somme « 7 » est celle qui apparaît le plus souvent.

b. Parmi les 36 issues, il y en a 6 qui permettent d'obtenir une somme égale à 7. La probabilité d'obtenir cette somme est égale à $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Partie C

Construisons un tableau à double entrée faisant apparaître l'écart entre les deux nombres obtenus.

2e dé / 1er dé	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

Le tableau permet d'affirmer qu'il y a 6 issues donnant un écart nul. La probabilité de l'événement « obtenir un écart nul » (ou « obtenir un double ») est égale à $\frac{1}{6}$.

Autre événement possible donnant une probabilité égale à $\frac{1}{6}$: « obtenir un écart égal à 3 ».

Exercice 4

Partie A

1. a. La piste a pour longueur 200 mètres. Il y a 8 plots espacés de la même longueur, l'écart entre deux plots consécutifs est donc égal à 25 mètres.
   Lola a parcouru 4 tours de piste, soit 800 mètres, et a franchi le premier plot dans le tour incomplet. Elle a donc parcouru 25 mètres supplémentaires.
   Au total, Lola a parcouru 800 m + 25 m, soit 825 mètres.

   b. Pour calculer la vitesse moyenne v en m/mn, on utilise la formule : $v = \frac{d}{t}$ avec d en mètres et t en minutes.
   $$v = \frac{825}{5} = 165$$
   La vitesse moyenne de Lola est donc de 165 m/mn.

2. Jonas a parcouru 700 mètres (ou 0,7 km) en 5 minutes (soit $\frac{5}{60}\ h$). Sa vitesse moyenne v en km/h est égale :
   $$v = \frac{0{,}7}{\frac{5}{60}} = \frac{0{,}7 \times 60}{5} = 8{,}4$$
   La vitesse moyenne de Jonas est égale à 8,4 km/h.

3. $\frac{825-700}{700} = \frac{125}{700} = \frac{5}{28} \approx 0{,}179$
   Le pourcentage d'augmentation est égal à 18%, pourcentage donné à l'unité près.

Partie B

1. En D2, on peut écrire « =200*B2+25*C2 ».

2. En E2, on peut écrire « =12*D2/1000 » ou « =0,012*D2 »
   NB : ici, la valeur 12 correspond à $\frac{60}{5}$, rencontrée dans la question 2 de la partie A.

3. La distance moyenne en mètres est égale à $\frac{17\,275}{25}$, soit 691 mètres.

Partie C

1. a. $\frac{L}{l} = \frac{5}{3}$ soit $l = \frac{3}{5} \times L = 0{,}6 \times L$
   Pour $L = 20$, on obtient $l = 0{,}6 \times 20 = 12$.
   Pour une longueur de 20 mètres, on obtient une largeur de 12 mètres.

   b. La longueur totale de la piste est égale à 2 fois la longueur L du rectangle augmentées de 2 demi-périmètres d'un cercle de diamètre $(0{,}6 \times L)$.

   Calculons : $2 \times L + 2 \times \pi \times 0{,}6 \times L$ avec $L = 20$.
   $$2 \times 20 + 2 \times \pi \times \frac{0{,}6 \times 20}{2} = 40 + 12 \times \pi.$$

La mesure exacte de la longueur de la piste en mètres est égale à $40 + 12 \times \pi$.
La mesure arrondie de la longueur de la piste au mètre près est égale à **78 mètres.**

2. Soit L la longueur en mètres du rectangle. On a vu précédemment que la largeur l du rectangle est égale à $l = 0,6 \times L$ mètres.

   Calculons la longueur en mètres de la piste lorsque la longueur du rectangle est égale à L mètres.
   Longueur de la piste (en mètres) = $2 \times L + 2 \times \pi \times \frac{(0,6 \times L)}{2} = 2 \times L(1 + 0,3 \times \pi)$.
   Si la longueur de la piste est égale à 200 mètres, on est amené à résoudre l'équation d'inconnue L : $2 \times L(1 + 0,3 \times \pi) = 200$.

   Soit encore $L(1 + 0,3 \times \pi) = 100$
   On en déduit que $L = \frac{100}{1+0,3\times\pi} \approx 51,481$.

   La valeur arrondie de la longueur au centimètre près 51,48 mètres.
   La valeur arrondie de la largeur au centimètre près est égale $0,6 \times L = 0,6 \times \frac{100}{1+0,3\times\pi}$, soit 30,89 mètres (valeur arrondie au cm près).

Exercice 5

Partie A

1. Pour construire le tour du géoplan de 25 picots, il faut placer 4 carrés sur la première ligne, 4 autres sur la dernière ligne et compléter par deux carrés la première colonne et 2 autres carrés sur la dernière colonne.
   Au total, l'élève a donc besoin de construire 12 carrés (4+4+2+2).

2. Un géoplan de 81 picots est composé de neuf picots par ligne. Il y a 9 lignes et de 9 picots par colonne.
   Pour réaliser le tour du géoplan, il faut construire 8 carrés sur la première ligne et sur la dernière ligne. Il faut ensuite compléter avec 6 carrés (8-2) sur la première colonne et sur la dernière colonne.
   Au total, le nombre de carré nécessaire pour réaliser le tour du géoplan de 81 picots est égal à 8+8+6+6, soit 28 carrés.

3. Soit n un nombre supérieur ou égal 2. Un géoplan de n^2 picots est composé de n picots par ligne et de n picots par colonne.
   Pour réaliser le tour de ce géoplan, il faut construire $(\mathrm{n} - 1)$ carrés sur la première ligne et sur la dernière ligne. Il faut ensuite compléter avec $(\mathrm{n} - 1 - 2)$ carrés (soit $\mathrm{n} - 3$ carrés) sur la première colonne et sur la dernière colonne.
   Au total, le nombre de carrés nécessaires est égal à $(\mathrm{n} - 1)$ +$(\mathrm{n} - 1)$ +$(\mathrm{n} - 3)$ +$(\mathrm{n} - 3)$, soit encore $(4\mathrm{n} - 8)$ carrés.

4. D'après la question précédente, le nombre de carrés nécessaires pour réaliser le tour d'un géoplan de n^2 picots est égal à $4n - 8$.

On est ramené à résoudre l'équation d'inconnue n :

$$4n - 8 \leq 107$$
$$4n - 8 + 8 \leq 107 + 8$$
$$4n \leq 115$$
$$n \leq \frac{115}{4}$$

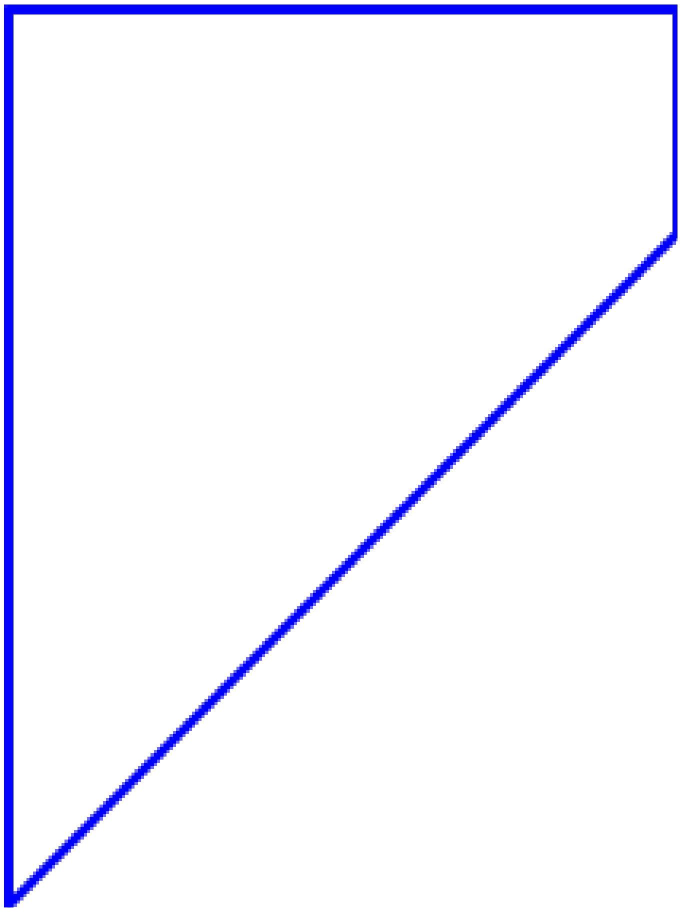
Or

$$\frac{115}{4} = 28{,}75$$

Comme n est un entier naturel, n est inférieur ou égal à 28.
Le nombre maximal de picots de ce géoplan est égal à 28^2 soit 784.

Partie B

1.



2. a. La figure est un trapèze rectangle dont la petite base a pour longueur 3 cm, de longueur de grande base 12 cm et de hauteur 3 cm.
   L'aire de ce trapèze est égale à $\frac{(3+12)\times 3}{2}$ cm² soit **67,5 cm².**

   b. Pour déterminer le périmètre de ce trapèze, il convient de calculer la longueur de la diagonale d'un carré de côté 9 cm.

La longueur de cette diagonale est égale à $9\sqrt{2}$ cm. (application directe du théorème de Pythagore).

Le périmètre de la figure est égal à $(3 + 3 \times 3 + 4 \times 3 + 9\sqrt{2})$ cm , soit encore $(24 + 9\sqrt{2})$ cm.

3. Valeur attribuée à A = 45 (rotation d'angle 45°)

   Valeur attribuée à B = 297 ($9\sqrt{2} \approx 12{,}73$, l'échelle choisie est de 1 cm pour $\frac{70}{3}$ pas et $9\sqrt{2} \times \frac{70}{3} \approx 297$)

   Valeur attribuée à C = 135 (rotation d'angle 45°+90°)